

数学の問題づくりと生徒の情意面に関する実証的研究

牧 下 英 世

1 はじめに

戦後わが国の学習指導要領は昭和22年の試案にはじまり、そのときどきの社会の要請や問題に対応するために、おおよそ10年ごとに改訂されてきた。近年でいえば、平成10年の改訂は、「ゆとり教育」のもと学校週5日制が実施され、全体の授業時間数が削減された。小学校・中学校の算数・数学では、指導内容が厳選され、授業時間数も削減された。授業時間数の削減は、中学校の統計分野のように高等学校へ内容を移行したり、内容そのものが削除されることにより行われた。このように授業時間数が削減され指導内容も減らされることで、児童・生徒の学力が低下することを世論は懸念した。OECDのPISA調査⁽¹⁾およびIEAのTIMSS調査⁽²⁾の結果によって、わが国の児童・生徒の学力について、全体として国際的に上位にあるものの、読解力や記述式の問題、さらに算数・数学に対する情意面に課題があることが指摘された。この指摘は東京理科大学数学教育研究所による理系高校生の数学学力調査においても垣間みることができる⁽³⁾。

この課題に対して、長岡(2010)⁽⁴⁾は「日本が戦後の貧困と混乱の中から、奇跡的な復興を遂げ、高等教育の機会が全国民化すると同時に、「良い学校」への進学競争が激化し、(中略)、「我が子」「我が生徒」の利益を最優先する「ホンネの立場」に迎合してビジネスを展開する教育サービスが肥大化していく。限られた「市場」に対して投入される人的資本は、あまりに限られているため、教育サービスは、教育の本質から遠ざかり、ひたすら迎合性を深め、質的に劣化して行った。数学で「悩み抜き、考え抜く」ことを避け、理科で「現象を見る」時間を節約するという傾向は、このようにして今でも我が国では根強く生き続けている。これは、「知育偏重」ではなく「知育放棄」「客商売優先」に過ぎない」と指摘する。筆者は、数学の学びにおいて、短時間に効率よく問題を解くことができることを優先させるあまりに、数学的な事象や現象を見る体験や活動が質的にも時間的にも十分ではなく、生徒が時間をかけて数学で悩み抜き、考え抜く習慣が希薄になっている結果、数学に対する情意面での課題が表れているのではないかと考える。

こうした課題を受けて、平成20年文部科学省は「ゆとり教育」を見直し、学習指導要領を改訂した。その結果、中学校数学科では削除・移行された内容が一部復活し、総授業時間数も70時間増加した。同時に、さらなる数学的活動を実践することで、生徒が基礎的・基本的な知識・技能を確実に身につけ、数学的な思考力・表現力、数学を活用する能力を育み、学ぶ意欲が高まるような授業の工夫が、

教師に求められている。筆者はこうした社会の要請を実現するためには、生徒の学力の根幹を支える情意面の充実を図ることが重要であると考えている。

本研究では、生徒による問題づくりとその問題を解き合うという授業において、生徒の情意面に関する実証的な考察を行う。なお、本稿では、第2章で「研究の方法と生徒の問題づくり」を、第3章で「分析と考察」を、第4章で「結論と今後の課題」をそれぞれ述べる。

2 研究の方法と生徒の問題づくり

秋田（1999）⁽⁵⁾は「問題づくりは既習の知識を活用させるという点においては有効であるが、さらにその効果を高めるには、学習内容をしっかりと身につけさせた上で問題づくりを行う必要がある」と指摘している。筆者は、中学3年次までの内容を修了した後に、和算を紹介し算額にちなんで数学の問題づくりを経験させ、作成した問題を他の生徒と共有し全員で解き合う授業の実践の過程から見えてきた生徒の数学的な考えの様相や生徒の数学に対する態度などについて、インタビューを中心とする調査を実施した。

2.1 授業のながれ

授業での実践は、2学期末の12月1週目から3学期にかけて全14回行った。ここでは特に、橋本（2001）⁽⁶⁾の研究にもあるように、仲間の生徒がつくった問題を参考にすることで、自分の問題づくりにおいて、問題の観点を変更したり、拡張したり、一般化して多面的に考えることができ、生徒の問題づくりが活性化することを期待して、第3回、4回の授業で、生徒の問題の原案を発表し合い、生徒相互で問題の内容を共有できるようにした。

<授業のながれ>

第1回授業：江戸時代の数学文化である和算と算額を紹介した。

第2回授業：金王八幡宮（東京都）、中尊寺（岩手県）、郡上八幡神社（岐阜県）に現存する算額を、それらの写真を用いて紹介した。算額の約束ごとや読み方、和算特有の助術（いわゆる公式）についても指導した。さらにこれらの算額や先輩たちがつくった問題を解く体験をさせた。

なお、生徒たちへは、問題づくりを冬季休業中の宿題とし、1月の3学期の始業式に問題づくりの原案を提出させた。

第3回授業、第4回授業：生徒がつくった問題（原案）をクラスの生徒に発表し、問題の内容、体裁などの情報を他の生徒とともに共有した。また、教師の側からは内容面、デザイン面で諸注意とアドバイスを与えた。その際に、問題をつくるもとになる考えやアイディアを発表させた。なお、生徒の主体性を促すために発表会の司会進行は生徒たちに担当させた。

第5回授業、第6回授業：問題づくり（清書）の時間とした。

第7回授業～第14回授業：生徒のつくった問題を解き合い、情報を共有した。なお、授業終了後に生徒に対して、本取り組みの感想と問題作成のヒントなどについてアンケート調査を行った。

2.2 5人の生徒の問題づくりとその考察と分析

中学3年生全員に問題づくりに取り組ませた。どの問題もよく練られた問題であった。その中から筆者が12題を選んで全員で問題を解き合った。ここでは、その12題の中からA君、B君、C君、D君、E君の5人の生徒の問題、解答（答と術）、感想を紹介する。また生徒へのインタビューやクラスの反応をもとに、生徒の数学的な考えの様相や生徒の数学に対する態度を中心に分析と考察を試みる。

(1) A君の問題

一辺3cmの正方形の4頂点を中心とする半径3cmと6cmの四分円を組み合わせて、図1の楕円が2つ組み合わさった図形をつくった。「あ」から「し」の部分の面積の和を求めよ。

【答】 $9\pi + 54\sqrt{3} - 72$ (cm²)

【術】 図2のように、AG = 6, EG = 3, $\angle AEG = 90^\circ$ より、 $\angle EAG = 30^\circ$ 同様に、 $\angle GAF = \angle FAC = 30^\circ$ によって、 $AE = AC = 3\sqrt{3}$, $GH = HF = 3\sqrt{3} - 3$

図形 GHF = おうぎ形 AGF - $\triangle AHF$ - $\triangle AHG$
 $= 3\pi - 9\sqrt{3} + 9$

図形 JGFI = おうぎ形 HIJ - 図形 GHF = $9\sqrt{3} - 9 - \frac{3}{4}\pi$

図形 EGL = おうぎ形 AGL - $\triangle AEG = 3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$

よって、「あ」から「し」の部分の面積の和は

$$4\left(9\sqrt{3} - 9 - \frac{3}{4}\pi\right) + 4\left(3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) + 4(3\sqrt{3} - 3) \times 3$$

$$= 9\pi + 54\sqrt{3} - 72 \quad (\text{cm}^2)$$

【A君の感想】 授業で勉強した算額の特徴である「美しい」図形を考えようとしたが、とても難しかった。また、問題文を分かりやすく書くことに苦労した。

【分析と考察】 与えられた図を一見すると、楕円の内容かと思える問題である。A君も「楕円が2つ組み合わさった図形」という表現を使っているが、四分円をつなげた図形であるからこの図形は楕円ではない。

生徒にとっては図形を大まかに掴むためのやむを得ない表現なのかもしれないが、「円の一部分が組み合わさった図形」のように、A君には別の表現を考えるように指導した。さらに、図形描画ソフトの conic 機能⁽⁷⁾（円錐曲線の描画機能）でかいた楕円がこの図形と重ならないことを確認させた。

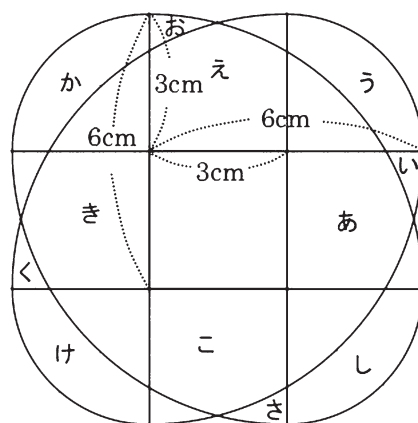


図1

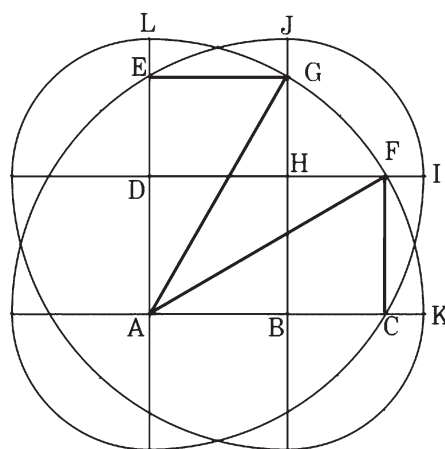


図2

中学生にとっては図形描画ソフトによる確認は、視覚的で分かりやすかったようだ。

インタビューによると、原題はA君が小学校時代に取り組んだ問題（円弧の長さの和を求める）で、円弧を繋げることによって楕円に似た美しい図形ができたことが記憶に残っていたことから、その問題をヒントにして、ここでは面積の和を求める問題にアレンジし直したとのことであった。

(2) B君の問題

右の図3において、2円O、O'は直径が等しく、2点A、Bはその交点で、ACは円Oの接線である。CD=5、DB=3のとき、2円の直径を求めよ。

[答] $\frac{32}{9}\sqrt{6}$

[術] 図4のように、点Aを通る円Oの直径をAEとする。2円の直径は等しいので、四角形AO'B Oはひし形となり、 $\angle AOB = \angle AO'B$ より、

$\angle AEB = \angle ACB$ （円周角の定理） ①

さらに、 $\angle AEB = \angle CAB$ （接弦定理）とあわせ

$\angle ACB = \angle CAB$ なので、

$\triangle ABC$ は $AB = BC = 3 + 5 = 8$ の二等辺三角形である。

ここで、BからACに垂線BMを下ろすと、

$\triangle ABE$ と $\triangle BMC$ において、

$\angle ABE = \angle BMC = \angle R$, $\angle AEB = \angle BCM$ (①より)

より、 $\triangle ABE \sim \triangle BMC$ (二角相等) ②

方べきの定理より、 $MC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{5(3+5)} = \sqrt{10}$

なので、 $BM = \sqrt{8^2 - \sqrt{10}^2} = 3\sqrt{6}$

よって、②とあわせて求める直径AEは、 $AE = BC \times \frac{AB}{BM} = \frac{8 \times 8}{3\sqrt{6}} = \frac{32}{9}\sqrt{6}$

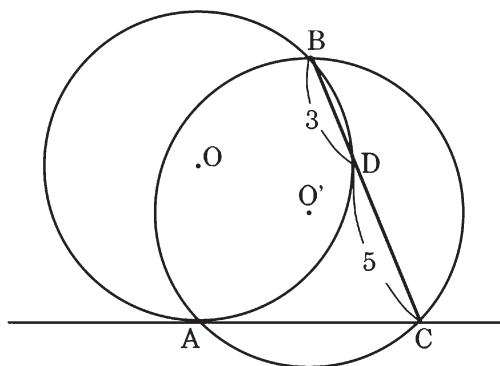


図3

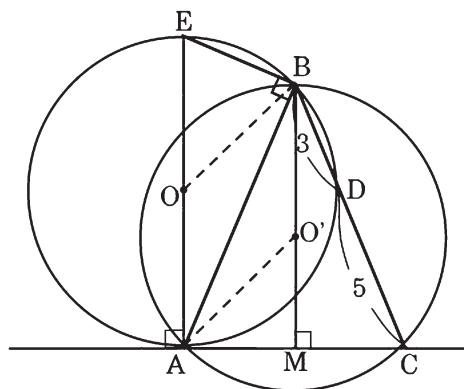


図4

[B君の感想] 問題を解くことはあっても、つくことはしたことがあまりなかったので、新鮮であった。見た目が単純できれいな問題をつくりたいと思い、同じ大きさの円を2つ重ねてみた。なるべく問題の設定を少なくし、図を単純化したり、求めるものがすぐ分かるように工夫したが、問題の難しさと両立させるのは大変だった。特に、最初にどの条件を与えるかを考えるのは難しかった。

[分析と考察] B君にインタビューしたところ、授業で学んだ方べきの定理と接弦定理を利用した

かったようだ。B 君の解法は、補助線を引いて相似な三角形を自分でつくらなければならない。一般に、補助線を効果的に引くことは難しいといわれている。そのためか、多くの生徒はこの問題を難しいと感じたようだ。さらに、「半径が等しい 2 円の等しい弧や等しい弦に対する円周角が等しい」ことにこの問題を難しいと感じると考えられる。1 円の円周角と弧の関係で「長さの等しい弧に対する円周角は等しい」ことの習熟は高いが、この問題のように、半径の等しい 2 円における等しい弧に対する円周角の关系到課題があることが明らかになった。解説の後、T 君から別解が示された。

【T 君の別解】 四角形 AOB O' はひし形だから、AO // BO' より BO' ⊥ AC だから、BO' は線分 AC の垂直二等分線になる。その交点を M とすると方べきの定理より、 $AC = 2\sqrt{10}$ 、 $MC = \sqrt{10}$ よって、 $BM = 3\sqrt{6}$ である。ここで円の半径を x とすると、 $BO' = AO' = x$ だから $O'M = 3\sqrt{6} - x$

三平方の定理より、 $(3\sqrt{6} - x)^2 + \sqrt{10}^2 = x^2$ よって $x = \frac{16}{9}\sqrt{6}$ ゆえに、求める直径は $\frac{32\sqrt{6}}{9}$

【分析と考察】 T 君の解答は、円の半径を計量することに着目した解答である。高校との接続を意識すれば、初等幾何的な取り扱いを踏まえ、図形を計量することの意義や大切さなどが実感でき、B 君をはじめとする他の生徒にとって、数学的な見方や考え方のよさを示唆するものである。

(3) C 君の問題

図 5 のように、正 12 角形が、直角三角形 ABC に 3 点で接している。正 12 角形に内接している $\triangle PQR$ と $\triangle ABC$ との面積比を求めなさい。

【答】 $\triangle PQR : \triangle ABC = 1 : 2(3 + \sqrt{3})$

【術】 正 12 角形は円に内接するから、1 つ分の弦がつくる中心角は 30° 、また、AO は $\angle A$ の二等分線だから、図 6 のように、正 12 角形の頂点 U を通る。

よって、 $\angle AOS = \angle AOT = 60^\circ$ 、

$\angle OAS = \angle OAT = 30^\circ$ であるから、 $\angle A = 60^\circ$

ゆえに、 $\angle C = 30^\circ$ である。

また、内接円 O の半径を 1 とおくと、 $AT = \sqrt{3}$ 、

$TB = 1$ より、 $AB = 1 + \sqrt{3}$ だから、 $BC = \sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$ 、

よって、 $\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})^2$ 、

つぎに、 $\angle POQ = 90^\circ$ だから円周角の定理により、

$\angle PRQ = 45^\circ$ となる。

Q から PR に垂線 QH を下ろすと、 $\angle QOR = 60^\circ$ だ

から、 $QR = OQ = OR = 1$

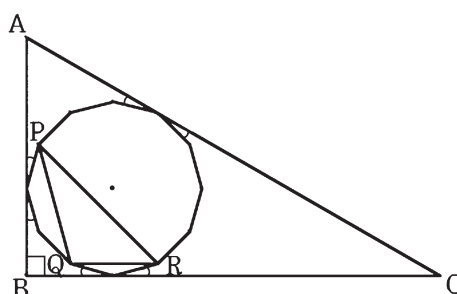


図 5

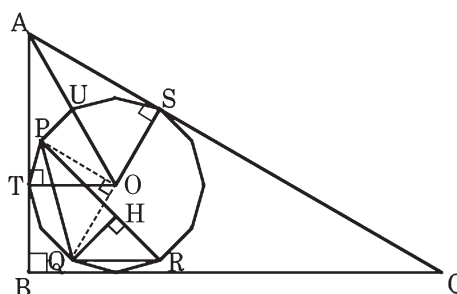


図 6

よって, $QH = RH = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ また, $\angle QPR = 30^\circ$ より $PH = \sqrt{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

よって, $\triangle PQR = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ ゆえに, $\triangle PQR : \triangle ABC = 1 : 2(3 + \sqrt{3})$

【C君の感想】 先生が示してくれた先輩たちの過去の作品では円が使われているものが多かったが, 私はあえて円を使わない問題をつくりたかった。しかし, この問題は円を使ったものと同じようにも思えるが, 結局正12角形の問題になった。以前に正 n 角形の周の長さから π を求めるレポートを書いたことがあり, その経験からこの問題を思いついた。後になって, 外側の三角形が正三角形を半分にしたものだ気がついたときは少し感動した。

【分析と考察】 問題の条件は, 直角三角形に内接する正12角形ということだけで, 辺の長さや角度が与えられていない。そのためか, 生徒の中にはどこから着手したらよいのか戸惑う生徒が少なからずいた。C君も感想で「感動した」と述べているように, この三角形が結果として, 30° , 60° , 90° になっていて, 他の生徒たちも問題の裏にこの三角形が隠れていることに感動していた。

また, C君の術にある「～を1とおいて」は, 中学校数学においても重要な手段となることがわかった。この方法は中学校の相似な図形の問題や, 高等学校で学ぶ三角比の学習においても重要な手段となる。これは化学の計算でもよく用いられる方法である。この「～を1とおいて」は, 小学校算数で指導される内容であるが, 中学校, 高等学校の数学の学習において重要な素地となることがわかる。

(4) D君の問題

正13角形と図7のように円がある。直線EFは点Eにおける円の接線である。BE = a , BC = b のとき, AC の長さを a , b で表しなさい。

【答】 $AC = \frac{(a^2 - b^2)^2}{b^3}$

【術】 EFは円の接線だから, $\angle BEF = \angle BAE$ ①

図8のように, 正13角形の頂点をGとすると,

正13角形は円に内接するから, $\angle GEF = \angle DAE$ ②

①, ②より, 3点G, B, Eは共線。GB = c とおくと,

GA//FE より $AB = \frac{bc}{a}$, 方べきの定理より $BD = \frac{a^2}{b}$

$\triangle GBA \sim \triangle DBE$ より $CD = \frac{a^2}{b} - b = \frac{a^2 - b^2}{b}$

正13角形の対称性より GE//FD, $CD = CE$, $CF = CA$,

よって $AC = \frac{(a^2 - b^2)^2}{b^3}$

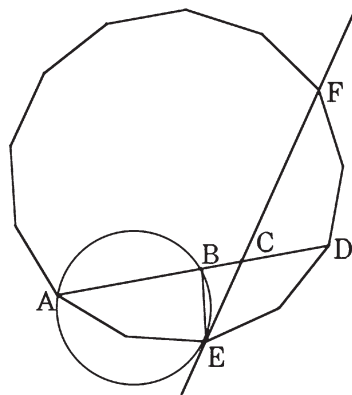


図7

【D 君の感想】 問題づくりはものすごく大変だった。正多角形が円に内接することを用いて問題をつくろうと思ったのだが、はじめ正八、九角形あたりでやっていたら、実際に角度が求まってしまい、簡単に解けてしまうので、正 13 角形とした。また、いろいろ求めているうちにまたスタート地点に行き着いてしまったり、難しい問題をつくったつもりでも全く別の解き方ですごく簡単に解けたりと、練っても練ってもなかなか問題が決まらなかった。問題の内容が決まってもいろいろな解法が頭に浮かんできて、どれを問題とすればよいのか迷った。

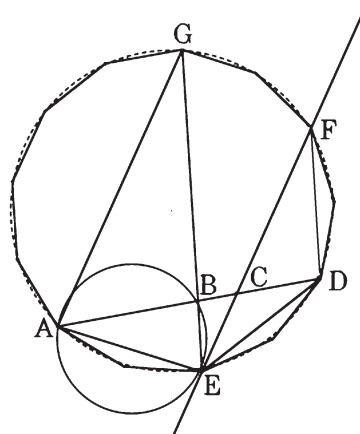


図 8

【分析と考察】 確かに正 9, 10, 12 角形であると、中心角がそれぞれ 40° , 36° , 30° となり、円周角が整数角になり問題として面白みに欠け、正 9, 10, 11, 12 角形だと三角形の頂点の取り方の組合せが少なくなって簡単な問題になってしまうかもしれない。それに打ち勝つために D 君のそうした信念と工夫があつてか、生徒たちはこの問題に魅力を感じながら取り組むことができた。本問題では正多角形は円に内接するということと、B 君の問題と同じように等しい円弧に対する円周角は等しいことを考えれば、相似な図形が見えてくる。また円弧と円周角の関係だけでなく、等しい弦と円周角との関係について指導することも重要であることがわかった。数学を活用するという観点でもこのような問題を教科書などで扱う必要があるだろう。感想の「練っても練っても」にもあるように、D 君が問題づくりで考えに考えを重ねて取り組んだことが感じ取れる。これは長岡⁽⁴⁾の「数学で悩み抜き、考え抜き」ことを表出している。D 君の取り組みからも分かるように、問題づくりは生徒の情意面により影響を与えることが伺える。

(5) E 君の問題

図 9 の甲 ($\triangle ADB$) の面積と乙 ($\triangle ADC$) の面積の比を求めなさい。ただし、 $\triangle ABC$ は正三角形とする。

[答] 甲 : 乙 = 9 : 4

[術] 点 B, C を中心に線分 BD, CD を、図 10 のように左右に 60° 回転させてできた 2 点 D', D'' によって、2 つの正三角形 D'BD, D''CD をつくと、3 点 C, D, D' と 3 点 B, D, D'' はそれぞれ共線である。よって、 $AD' \parallel DD''$, $AD'' \parallel DD'$ である。平行線の性質によって、甲 = $\triangle ADB$ = 正三角形 D'BD,

乙 = $\triangle ADC$ = 正三角形 D''CD

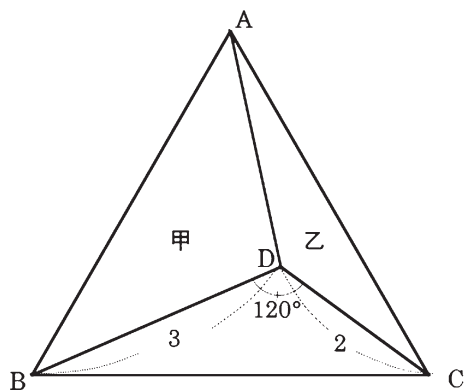


図 9

である。よって、 $\text{甲}:\text{乙}=3^2:2^2=9:4$

【E君の感想】 算額をつくるには問題も答えも考えなければならぬので、単に存在する問題を解いて答えを出すより数段難しかった。答えをどういう風な感じにしようかと決めてから問題をつくと案外簡単に問題を作成することができた。

昔の数学を現代にもう一度復活させるというこういう企画は非常に面白いと思った。

【分析と考察】 E君にインタビューしたところA君と同様に、この問題は小学校時代に取り組んだ問題をアレンジしたものであることがわかった。生徒には数学の問題をつくった経験がないこともあってか、中学校で学んだ内容、とくに直近の授業で扱った内容を参考にするだろうと想定はしていたが、中学校の内容だけでなく小学校のときに解いた問題も参考にする生徒が少なからずいることがわかった。

E君が述べているように、先に解答を考えてから問題づくりに向かうというE君の問題づくりのアイデアは有効かもしれない。また、E君の術にもあるように、中学校においても回転移動など、数学における多面的な見方や考え方を指導しておきたい。ここでは、E君の問題に関連して、「E君の算額を参考にして、先生も算額を奉納したよ」といって、次の問題を示してみんなで取り組んだ。

（問題） 図11のように、正三角形ABCの内部に点Dをとる。3頂点A, B, CからDまでの距離がそれぞれ12, 13, 7のとき、 $\triangle ABC$ の一辺の長さを求めなさい。

（答） 正三角形の一辺の長さは、 $5\sqrt{13}$

【分析と考察】 正答した中学生（123名中）が半数程度いたのは、直近のE君の問題が影響したのだろう。以前、本問題を高校3年の演習で出題したが、E君のように回転移動⁽⁸⁾を用いて正答した生徒は、1名（104名中）であった。多くの者が余弦定理で計算していたが、その計算でミスをする者が多数いた。T君の別解のように、高校生は図形問題を初等幾何的に考えるよりも、図形を計量する方向に向きやすいという現れではないかと考える。高等学校で学ぶベクトルや複素数平面など、数学の新しい構造を指導する際には、このような初等幾何を用いた視覚的な意味づけは有効に機能する⁽⁹⁾と考える。

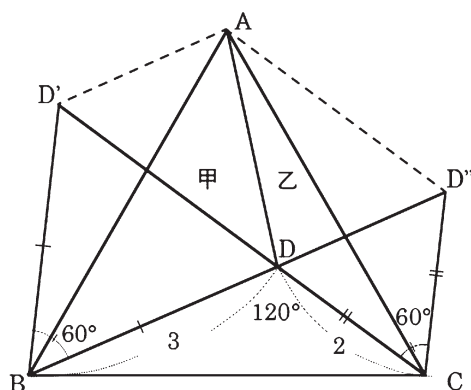


図 10

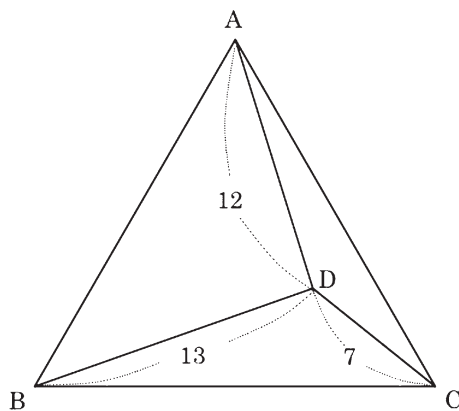


図 11

3 分析と考察

A 君, B 君, C 君, D 君, E 君の 5 人の生徒について, 問題づくりから授業の中で解き合ったときの様子や生徒の感想, 5 人へのインタビューなど, 生徒の数学的な考えの様相や数学に対する態度について貴重なデータを得ることができた。そこで, 5 人の分析と考察の傾向をもとに全員の生徒について, つぎの 3 つの観点, (1) 問題づくりとして, (2) 問題の内容や問題づくりの方法として, (3) 問題づくり後の生徒の感想として, による分析と考察を行う。

3.1 中学 3 年生の考察と分析

まず, (1) 問題づくりとしては, 多くの生徒にとって問題づくりが初めての経験であったためか, 例えば「はじめに答えを設定してから問題をつくるのか, 図形を設定してある部分の答えを求めているのか, つくり方が分からなかったので大変であった」(以後, 「」内は生徒の感想) のように, 問題づくりの難しさを感じている生徒が少なからずいることがわかった。

つぎに, (2) 問題の内容や問題づくりの方法としては, 「先生が紹介してくれた算額で, 円が接触する問題があったが, 円を三角形で置き換えたらどうなるかと思ってこの問題にした」や「でき上がった問題(円の接触関係)が簡単であったので, 円の位置を違う場所に移動したらとても難しい問題になった」のように, 教師の提示や問題の構成要素を変更することによって問題づくりが行われることがある。さらに, 「方べきの定理など授業で学んだ定理とにらめっこして問題を考えた。簡単な問題をつくることさえ大変で, 正直な話, この数値(生徒が出した答え)の図形が存在するのか不安である」や「円に関する問題をつくろうと思い, 授業で円の直交を学んだので, それを絡めた問題にしてみた」のように, 直近の授業で学習した定理を用いることを試みる生徒がいることがわかった。また, 「NATO の旗の中心に描かれている羅針盤をモチーフにして出題した」のように, 実際に存在する身のまわりにある事象を利用した問題もいくつかあった。以上, (2) 問題づくりの内容や問題づくりの方法についてまとめると, (i) 授業での学習した内容によるもの(B 君も), (ii) 教師のアドバイスによるもの, (iii) 小学校時代の経験によるもの(A 君, E 君も), (iv) これまでに経験した問題の構成を変更することによるもの, (v) これまでに獲得した数学的な知識をもとにするもの(C 君のように, レポートで研究した経験を含めて), (vi) 身の回りの事象を利用するもの, など幅広い対象に題材や問題づくりの方法を求めることが明らかになった。

さらに, (3) 問題づくり後の生徒の感想としては, 「よい経験になった。普段私たちは問題を消費する側について, どちらかというと受動的に幾何の授業を受けていたが, 自ら問題をつくり, 創造する側へ回ったことにより, 能動的に幾何の授業に参加することができて幾何の問題に対する考え方, 感じ方が変わった」とか, 「何通りも案を出して, これは簡単すぎる, これはつまらないと, 長時間試行錯誤した結果, このような問題になった。そうやって考える時間は予想以上に楽しかった。この問題は正五角形の中に黄金比があることを利用して面積を求めることにした。問題作成のコンセプト

は、中学生が解けるレベルのシンプルで少し考えさせる問題だが、これが達成できたかはよく分からない。僕の問題を解く人が少しでも楽しんでくれたらうれしい」のように、問題づくりを通して学習することの楽しさや学習することの意義などに言及するとともに、出題者側の立場に立った意見を述べる生徒が少なからずいた。また、問題づくりによって生徒自身の数学に対する態度がポジティブな方向に変容することが伺える。また、生徒は問題づくりのためにあれこれと数学の内容に対して試行錯誤を繰り返して取り組むことが伺える。また、「問題をつくることはもちろん、その解き方は正しいか、検算したり、問いそのものに誤りがないかを確かめるのは大変でした。出題することの難しさを知りました」のように、数学を自分の視覚、触覚で確かめながら、問題をつくることにより、数学の楽しさを実感できることを伺えるものが少なからずいることがわかった。以上、(3) 問題づくり後の感想などからは、(i) 学習することの楽しさと意義を感じることを意識し、これまで獲得した数学の知識を総動員してよい問題をつくろうとすること、(iii) 主体的に数学と対峙すること、など問題づくりをとおして、多くの生徒が数学に立ち向かおうとする傾向にあることが明らかになった。また、A君のように数学の内容に美しさを見いだしたり、C君のように問題をつくった後に問題の中に正三角形の半分という数学的な内容が問題の中に仕込んだという生徒の喜びを引き出すことなど、生徒の情意面によい影響を与えることが明らかになった。

4 結論と今後の課題

3章の「分析と考察」から、数学の問題づくりは、生徒に対して数学の学習の楽しさや意義を実感させることに極めて有効であることが明らかになった。とくに、作成した問題をすべての生徒で共有し全員で解き合うことは、問題をつくった生徒はもとより、他の生徒に対してもその効果を高められることがわかった。すなわち、本取り組みはつくる側の生徒だけではなく、問題に取り組んだすべての生徒の数学における情意面を高める有効な手段となることが実証できた。

今後の課題は、高等学校の数学を学んだ生徒が中学校時代と情意面でどのように変容したかを分析・考察することによって、中学校と高等学校の接続や連携を重視した数学のカリキュラムを作成することである。その際、数学の内容を発展させたり、学習者自身の研究成果を発表する機会をつくるなど、大学での数学の学びを意識した取り組みを盛り込むように心がけてゆきたい。

注(1) OECD（経済協力開発機構）による生徒の学習到達度調査（Programme for International Student Assessment, 以後、PISA 調査という）は、3年ごとに、加盟国の義務教育修了段階の15歳児を対象とし、数学的リテラシー、科学的リテラシー、読解力の3分野からなる国際調査を行っている。このPISA調査では、知識や技能を実生活の様々な場面で直面する課題にどの程度活用できるかを評価する。また、思考プロセスの習得、概念の理解、および様々な状況でそれらを生かす力を重視する内容となっている。日本の結果（全参加国中の順位*）は表1のとおりである。

(2) IEA（国際教育到達度評価学会）は異なった文化的、社会的、経済的背景をもつ国々の間で実証的な教育の比較研究を行い、各国／地域の教育到達度と教育諸要因との関連を明らかにすることを目的とした学術研究団体である。TIMSS 調査（国際数学・理科教育動向調査）の概要と目的は初等中等教育段階における児童・

表 1 「PISA 調査のそれぞれの年次の国際調査結果の要約より」*文部科学省ホームページより

調査実施年 (参加国数)	2000 年調査 (32 カ国)	2003 年調査 (41 カ国)	2006 年調査 (57 カ国)	2009 年調査 (65 カ国)
数学的リテラシー	1 位	6 位	10 位	9 位
科学的リテラシー	2 位	2 位	6 位	5 位
読 解 力	8 位	14 位	15 位	8 位

生徒の算数・数学および理科の教育到達度を国際的な尺度によって測定し、各国の教育制度、カリキュラム、指導方法、教師の資質、児童・生徒の学習環境条件等の諸要因との関係を明らかにすることを目的としている。2007 年 TIMSS 調査の算数・数学の結果は、小学 4 年生の平均得点は 568 点（国際平均点 500 点）で世界第 4 位、中学 2 年生の平均得点は 570 点（国際平均点 500 点）で世界第 5 位であった。しかし、情意面の調査では、「算数・数学の勉強の楽しさ」について、小学 4 年生に「算数の勉強が楽しいか」を、「強くそう思う」、「そう思う」、「そう思わない」、「まったくそう思わない」の 4 つの選択肢で尋ねたところ、「強くそう思う」と答えた日本の児童の割合は 34% であった（国際平均値 55%）。また、中学 2 年生に「数学の勉強が楽しいか」を同様の 4 つの選択肢で尋ねたところ、「強くそう思う」と答えた日本の生徒の割合は 9% であった（国際平均値 35%）。

- (3) 東京理科大学数学教育研究所編（2007）「高校生の数学力 NOW Ⅲ」（フォーラム A）、56 頁～57 頁：東京理科大学への入学者が 5 名以上の高校の中から任意に学校を選び、その学校から対象とする高校 3 年生のうち「数学Ⅲ」、「数学 C」を履修している生徒に対して 10 月上旬に実施する、理系高校生の基礎学力調査である。この調査では正答率の他に、その解答に対する自信の程度を「a. 自信あり」、「b. あまり自信なし」、「c. 全く自信なし」の 3 肢で回答してもらい、「a. 自信あり」と答えた生徒の割合（%）を自信率として調査している。

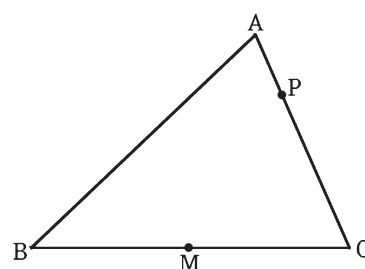


図 12

＜調査問題＞ △ABC において、辺 BC の中点を M とします。また、辺 AC 上に図 12 のように点 P をとります。

辺 BC 上に点 Q を $\triangle PQC = \frac{1}{2} \triangle ABC$ となるようにとります。点 Q はどのように作図すればよいですか。

＜解法例＞ A を通る直線のうち、直線 PM と平行な直線と辺 BC との交点が求める点 Q である。

＜分析＞ 正答率などの反応率の比較は表 2 のとおりである。本問題は、中学校で学習する図形の内容（平行線の性質とその利用）である。調査対象の高校 3 年の理系生徒の正答率が 20% 程度と極めて低く、無答率が 25% もいること、さらに解答する際に自信を持って解答したかどうかの割合（自信率）が極端に低いことなど、課題は大きい。

表 2 反応率の比較

	2005 年	2006 年	2007 年
正 答 率 (%)	20.9	16.2	15.9
自 信 率 (%)	11.9	7.6	5.8
誤 答 率 (%)	64.1	51.0	58.9
無 答 率 (%)	15.0	32.8	25.2
期待正答率 (%)	65.0	65.0	65.0

- (4) 長岡亮介（2010）『科学技術立国とは何か』（SSH 数学科教員研修会資料、筑波大学附属駒場高等学校）65 頁～68 頁
- (5) 秋田美代（1999）『構造的・問題づくり学習による創造的思考の活性化—CS カード利用による創造力育成の基盤づくりの手法—』（日本数学教育学会誌 第 81 巻 1 号、2 頁～11 頁）
- (6) 橋本吉貴（2001）『算数・数学科における「発展的な考え方」に関する考察』（日本数学教育学会誌 第 83

巻9号, 10頁～17頁)

- (7) Cabri Geometry II Plus を利用した。conic 機能は、指定した5点を通る楕円を描くことができる。
- (8) 線分 AD, BD, CD を 60° 回転してできる図13のような六角形 AD'BD''CD''' は、面積としては正三角形 ABC の2個分になる。また、一辺が 12, 13, 7 の正三角形と、三辺が 12, 13, 7 の合同な三角形が3個の面積の和と等しい。正三角形 ABC の一辺の長さを x とすると、

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (12^2 + 13^2 + 7^2) + 3\sqrt{16(16-12)(16-13)(16-7)}$$

よって、 $5\sqrt{13}$ 故に、正三角形 ABC の一辺の長さは、 $5\sqrt{13}$

- (9) 牧下英世 (2011)『高等学校の幾何教育教材の開発とその実証的研究—ベクトルの内積を視覚化する試み—』(数学教育学会会誌 (臨時増刊)): 図14のように、一方のベクトルを他方のベクトル上へ正射影することによって、2つのベクトルの内積を方べきとして捉えることができる。さらに、図15のように、補助円 Q をかき加えれば、方べきの定理より、つぎが成り立つ (円 Q の半径は r , 4点 O, S, Q, R は共線)。

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB'}| = OS \cdot OR = (OQ - r)(OQ + r) = OQ^2 - r^2$$

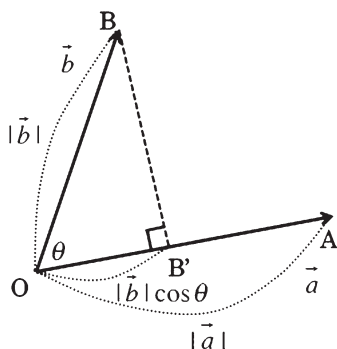


図 14

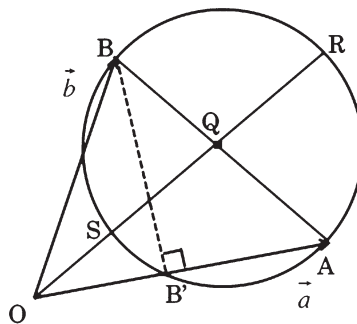


図 15

これは、ベクトルの内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ が、図15の三角形 OAB における中線 OQ の2乗と QA の2乗との差として表せることを示している。このように、ベクトルの内積が初等幾何との関係を考察することで、生徒は内積を意味のある新しい概念として捉えることができる。つぎは等式の証明問題であるが、初等幾何 (方べき) を用いることで、ベクトルの内積を視覚的に捉えることができる問題となる。

$$(1) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \quad (2) |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$$